Title	Ergodic変換のNormalizerのOuter Conjugacy (作用素環の研究とその応用)
Author(s)	押川, 元重
Citation	数理解析研究所講究録 (1979), 356: 46-54
Issue Date	1979-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/104470
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
356巻 1979年 46-54

ergodic 変換の normalizer の outer conjugacy

九大 教養　押川元重

1. von Neumann algebra およびその上の automorphism の理論と密接に関連した 測度空間上の変換の理論をのべる。測度空間上の変換に関する定義よりはじめる。

定義. σ有限測度空間(Ω, P)からσ有限測度空間(Ω', P')上への1対1で両可測な写像φが non-singularity property "$P(A)=0$ if and only if $P'(\varphi A)=0$" をみたすとき, isomorphism とよび, このときこれら2つの測度空間は isomorphic であるということにする。

定義. 実数直線Rおよびその上のルベーグ測度からなる測度空間(R, du)と isomorphic なσ有限測度空間を Lebesgue space とよぶことにする。

定義. σ有限測度空間(Ω, P)からその上への isomorphism T を automorphism とよぶことにする。(Ω, P)上の automorphism からなる一径数群$\{T_s, -\infty < s < \infty\}$が

$T_t T_s = T_{t+s}$ をみたし，かつ $(\omega, s) \longrightarrow T_s\omega$ が可測写像であるとき，flow とよぶことにする。

定義． automorphism T（または flow $\{T_s\}$）が ergodic であるとは，T 不変可測関数：$f(T\omega) = f(\omega)$（$\{T_s\}$ 不変可測関数：$f(T_s\omega) = f(\omega)$）は定数関数に限ることである。

定義． automorphism T と T'（flow $\{T_s\}$ と $\{T'_s\}$）が同型であるとは，(Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で $T'\varphi\omega = \varphi T\omega$（$T'_s\varphi\omega = \varphi T_s\omega$）をみたすものが存在することである。

2． ergodic 変換の弱同値．

定義． (Ω, P) 上の automorphism T について，$\{T^n\omega ; n \in Z\}$ を ω の T 軌道とよび，$\mathrm{Orb}_T(\omega)$ と表わすことにする。automorphism T と T' が弱同値であるとは，(Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で，$\varphi\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$ をみたすものが存在することである。

Lebesgue space (Ω, P) 上の ergodic automorphism T に対して，直積空間 $(\Omega \times R, P \times du)$ 上の automorphism $\tilde{T}$ を次のように定める。 $\tilde{T}(\omega, u) = (T\omega,\ u - \log \frac{dPT}{dP}(\omega))$．

このとき，$(\Omega \times R, P \times du)$ から Lebesgue space (X, m) 上への可測写像で次の(1),(2),(3)をみたすものが存在する。

(1) π は non-singular property をみたす。

(2) π は $\tilde{T}$ 不変である。すなわち $\pi\tilde{T}(\omega, u) = \pi(\omega, u)$.

(3) $\tilde{T}$ 不変可測関数 $f(\omega, u)$ は $\pi(\omega, u)$ の関数とみなせる。

このような π は次の意味で一意に存在する。: π' および (X', m') を同様のものとすれば, (X, m) から (X', m') への isomorphism φ で $\varphi\pi\omega = \pi'\omega$ をみたすものが存在する。X は全ての $\tilde{T}$ ergodic 成分からなる空間とみなせばよい。

$(\Omega \times R, P \times du)$ 上の flow $T_s(\omega, u) = (\omega, u+s)$, $-\infty < s < \infty$ を考えると, $\{T_s\}$ は $\tilde{T}$ と可換であるから, ($\{T_s\}$ の π による像として) X 上の ergodic flow $\{A_s\}$ で $A_s\pi(\omega, u) = \pi T_s(\omega, u)$ をみたすものが定まる。$\{A_s\}$ のことを T の associated flow とよぶことにする。これは ergodic automorphism の弱同値に関する不変量になっている。[4]

定義. ergodic automorphism T をその associated flow $\{A_s\}$ により次のように分類する。$\{A_s\}$ が R 上の translation : $u \longrightarrow u+s$ と同型のとき, T は II 型という。II 型でないときを III 型という。$\{A_s\}$ が区間 $[0, \log\frac{1}{\lambda})$ 上の translation : $u \longrightarrow u+s \mod (\log\frac{1}{\lambda})$ (ただし $0<\lambda<1$) と同型のとき, T は III_λ 型という。$\{A_s\}$ が一点集合上の trivial flow であるとき, T は III_1 型という。$\{A_s\}$ が非周期的かつ再帰的な ergodic flow であるとき, T は III_0 型という。

W. Krieger は associated flow が Lebesgue space 上の

Ⅲ型の automorphism の弱同値類から Lebesgue space 上の再帰的な ergodic flow の同型類の上への1対1対応を与えることを示した。[6]

ここで von Neumann algebra の理論との関係をのべる。ergodic automorphism T から measure space construction によって factor M(T) がつくられる。T の型は M(T) の型に対応しているし，T の associated flow は Connes − Takesaki [3] の flow of weight に対応している。さらに Connes の結果（[1] 等）によると，III_1 型をのぞいた（未解決！）hyperfinite factor は Lebesgue space 上の ergodic automorphism からつくられる factor と $*$-isomorphic である。従って hyperfinite factor を考える限り ergodic automorphism からつくられた factor を考えれば充分ということになる。

3. normalizer の outer conjugacy.

定義. (Ω, P) 上の ergodic automorphism T に対して，同じ測度空間上の automorphism R が $R\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_T(R\omega)$ をみたすとき，R を T の normalizer といい，T の normalizer の全体のなす群を $N[T]$ で表わすことにする。

定義. $R \in N[T]$ と $R' \in N[T']$ が outer conjugate であるとは (Ω, P) から (Ω', P') 上への isomorphism φ で $\varphi\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$ かつ $\varphi R\,\mathrm{Orb}_T(\omega) = R'\,\mathrm{Orb}_{T'}(\varphi\omega)$

をみたすものが存在することである。

<u>定義</u>. $R \in N[T]$ および自然数 n について,

$R^i \mathrm{Orb}_T(\omega) \cap \mathrm{Orb}_T(\omega) = \phi \quad (i=1,2,\cdots,n-1)$ かつ

$R^n \mathrm{Orb}_T(\omega) = \mathrm{Orb}_T(\omega)$ をみたすとき, R は <u>outer period</u> n をもつという。またこのような n が存在しないとき, R は <u>outer aperiodic</u> であるという。T の outer period 1 の normalizer の全体を $[T]$ で表わし, $[T]$ の元を inner normalizer という。

(Ω, P) 上の $R \in N[T]$ に対して, $\Omega \times R$ 上の automorphism $\widetilde{R}$: $\widetilde{R}(\omega, u) = (\omega, u - \log \frac{dPR}{dP}(\omega))$ を考える。$\widetilde{R}$ は $\widetilde{T}$ の normalizer になっていることより, ($\widetilde{R}$ の π による像として) X 上の automorphism ρ で $\rho\pi(\omega, u) = \pi\widetilde{R}(\omega, u)$ をみたすものが存在する。$\widetilde{R}$ と $\{T_s\}$ は可換だから, ρ と $\{A_s\}$ は可換である。ρ のことを <u>mod R</u> と表わすことにする。

normalizer の outer period と mod は outer conjugacy の不変量になっている。Connes−Krieger [2] はさらに Ⅲ型の場合について, これらが完全不変量であることを示した。

確率分布 $\{P_0, P_1\}$, $P_0 + P_1 = 1$ を与えた 2 点集合 $\{0, 1\}$ の片側無限直積測度空間 $(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty}\{P_0, P_1\})$ 上で 有限ヶの座標をかえることによってえられる automorphism の全体がなす群を $\Gamma(P_0, P_1)$ で表わすことにする。

定理〔5〕. 任意の ergodic automorphism T と任意の n に対して，T の normalizer R で mod R は恒等写像でかつ R の outer period が n となるものが存在する。

証明. $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty}\{\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\}\right)$ 上の変換 σ_n を次で定義する。

$$(\sigma_n w)_i = w_{i+1} \quad (i=ln+1,\cdots,ln+l+1) \quad (\sigma_n w)_{ln} = w_{(l-1)n+1}, \quad l=1,2,\cdots.$$

σ_n は $\Gamma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ の normalizer でかつ outer period n である。Ω の恒等変換と σ_n の直積変換は $\{T''\}\times\Gamma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ の normalizer で mod は恒等変換かつ outer period n である。$\{T''\}\times\Gamma(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$ と T が弱同値であることから結論をえる。　　　証明終

N〔T〕に次のような位相を考える。$R_k \in N[T]$ が $k\to\infty$ で $R\in N[T]$ に収束するとは，$\lim_{k\to\infty} P(\omega; R_k^{-1}TR_k\omega \neq R^{-1}TR\omega) = 0$ かつ R_k は R に弱収束すること，すなわち任意の可積分関数 $f(\omega)$ について，$\lim_{k\to\infty}\int\left|f(R_k\omega)\frac{dPR_k}{dP}(\omega) - f(R\omega)\frac{dPR}{dP}(\omega)\right|dP(\omega) = 0$ がなりたつことである。

定理〔5〕 mod R が恒等写像であるための必要十分条件は R が〔T〕の閉包に属することである。

ergodic flow $\{T_s\}$ に対して，$\{T_s\}$ と可換な automorphism の全体のなす群を $C(T_s)$ で表わすことにする。$C(T_s)$ 上には弱収束の位相を考えることにする。

定理（Hamachi [t.a.]）III 型の automorphism T について mod は $N[T]$ から $C(A_s)$ 上への写像であり，さらに $N[T]/[T]$ と $C(A_s)$ は位相をこめて同型である。

証明．定理の前半は III_∞, III_λ $(0<\lambda<1)$, III_1 型のときは [5] で証明されたが，III_0 型を含む一般の形では最近 Hamachi が与えた。ここでは Hamachi のものを少しかえた形で証明する。$\log\lambda$ と $\log\eta$ が rationally independent になるような正数 λ, η を考え，直積変換群 $\Gamma\left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \times \Gamma\left(\frac{1}{1+\eta}, \frac{\eta}{1+\eta}\right)$ を G で表わし，直積測度空間 $\left(\prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\} \times \prod_{i=1}^{\infty}\{0,1\}, \prod_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right\} \times \prod_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{1+\eta}, \frac{\eta}{1+\eta}\right\}\right)$ を (W, μ) で表わすことにする。このとき次が成りたつ。

(i) $\left\{ g \in [G]\ ;\ \frac{d\mu g}{d\mu}(w) = 1 \right\}$ は ergodic である。

(ii) $\left\{ \frac{d\mu g}{d\mu}(w)\ ;\ w \in W,\ g \in G \right\} = \{\lambda^n \eta^m\}$ は R で稠密である。

(iii) $g \in G$ に対して，$\tilde{g}(w, u) = \left(gw, u - \log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)\right)$ で与えられる変換 $\tilde{g}$ の全体 $\tilde{G}$ は ergodic である。

Lebesgue space (X, m) 上の ergodic flow $\{T_s\}$ に対して，$(W \times W \times X \times R, \mu \times \mu \times m \times e^u du)$ 上の変換 (g, g') $(g, g' \in G)$ を

$$(g, g')(w, w', x, u) = \left(gw, g'w', T_{\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)}x, u - \log\frac{d\mu g'}{d\mu}(w') - \log\frac{dm T_{\log\frac{d\mu g}{d\mu}(w)}}{dm}(x)\right)$$

で定義し，(g, g') の全体のつくる群を $\mathcal{G}$ で表わすことにする。$\pi(w, w', x, u, v) = T_v x$ でもって $W \times W \times X \times R \times R$ から X 上への写像 π を定義すれば，π は non-singular property をみたしかつ π は $\tilde{\mathcal{G}}$ 不変である。さらに $f(w, w', x, u, v)$ を $\tilde{\mathcal{G}}$ 不変な関

数とすれば，$f(w, gw', x, u-\log \frac{d\mu g}{d\mu}(w'), v) = f(w, w, x, u, v)$
だから (iii) より $f(w, w', x, u, v) = f(w, x, v)$ と表わせる。
$\frac{d\mu g}{d\mu}(w)=1$ をみたす $g \in [G]$ について，$f(gw, x, v) = f(w, x, v)$
だから (i) より，$f(w, x, v) = f(x, v)$ と表わせる。
$f(T_{\log \frac{d\mu g}{d\mu}(w)} x, v - \log \frac{d\mu g}{d\mu}(w)) = f(x, v)$ だから (ii) より
$f(T_s x, v-s) = f(x, v)$ が全ての s についてなりたつ。従って $f(x, v) = f(T_v x)$ と表わせる。
$U \in C(T_s)$ に対して，$R_U(w, w', x, u) = (w, w', Ux, u - \log \frac{dm U}{dm}(x))$
とすれば，$R_U \in N[\mathfrak{T}]$ かつ $\pi \widetilde{R}_U(w, w', x, u, v) = T_v U x = U\pi(w, w', x, u, v)$。
以上より $\mathfrak{T}$ の associated flow は $\{T_s\}$ で，$\mathrm{mod}\, R_U = U$。$\mathfrak{T}$ は1つの ergodic automorphism からつくられる群と（弱同型の意味で）みなせるから結論を得る。　　　　証明終

この定理により $N[T]/[T]$ の構造を見るには $C(A_s)$ を調べればよいことになる。最近 Hamachi は次のような結果を得ている。

① $C(T_s)$ が compact になるための必要十分条件は $\{T_s\}$ が有限不変測度をもちかつ純点スペクトルをもつことである。従って $N[T]/[T]$ が compact になるための条件が T の associated flow $\{A_s\}$ の条件で与えられた。

② $C(T_s) = \{T_s\}$ をみたすような ergodic flow $\{T_s\}$ が存在

する。従って $N[T]/\overline{[T]}$ が R と同型となるような T がある。
③ $C(T_s)$ が非可換群となるような ergodic flow $\{T_s\}$ が存在する。従って $N[T]/\overline{[T]}$ が非可換群となるような T がある。

REFERENCES

1. CONNES, A. : Classification of Injective factors

2. CONNES, A., and KRIEGER, W. : Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and approximate finiteness.
3. CONNES, A., and TAKESAKI, M. : The flow of weights of factors of type III. Tohoku Math. J. 29 (1977), 473-575.
4. HAMACHI, T., OKA, Y., and OSIKAWA, M. : Flows associated with Ergodic Non-singular transformation groups. Publ. RIMS 11 (1975), 31—50.
5. HAMACHI, T. and OSIKAWA, M : Fundamental homomorphism of normalizer group of ergodic transformation. (To appear in Springer Lecture notes, Preceeding of Conference on Ergodic Theory at Oberwolfach in 1978)
6. KRIEGER, W. : On ergodic flows and isomorphism of factors. Math. Ann. 223 (1976), 19-70.